INSPECTORATUL
SCOLAR JUDETEAN
MARAMURES

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 28 februarie 2015
Clasa a XI – a

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$.

b) Să se arate că $\det\left(A^n-nA\right)\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

2. Șirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ de numere reale sunt definite prin $x_0=y_0=1$ și

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

a) Să se arate că $x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$ și $y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n=0, \forall n\in\mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că ecuația $x^2-5y^2=-4$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

3. Fie $A,B\in M_3(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det(A)=1$.

a) Să se demonstreze că $\exists b,c,d\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\det(B+xA)=x^3+bx^2+cx+d, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Dacă $\det\left(B+\sqrt{2}A\right)=0$, demonstrați că $\exists x_0\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\det(B+x_0A)=0$.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=a>1$ și $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{x_n}, \forall n\geq 1$.

a) Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu note de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Petruțiu Crina - Colegiul Național „ Gheorghe Şincai”, Baia Mare
prof. Boroica Gheorghe - Colegiul Naţional „ Gheorghe Şincai”, Baia Mare
prof. Bojor Florin - Colegiul Naţional „ Gheorghe Şincai”, Baia Mare